مبرهنة: إن لصاقة المجموعة A في الفضاء المتري X تحقق الخواص التالية:

1. اللصاقة تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحوي A.
2. ″ أصغر مجموعة مجموعة مغلقة تحوي A.
3. تكون المجموعة A مغلقة إذا وفقط إذا كانت تساوي لصاقتها

A مغلقة $\Leftrightarrow A=\bar{A}$

البرهان: -1- لنرمز بـ B لتقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحوي A ولنثبت أن $B=\bar{A}$

لنفرض أن $x \notin B$ هذا يعني أن توجد مجموعة مغلقة F تحوي A والنقطة x لا تنتمي إليها $F \supseteq A$ ، $x \notin F$ المجموعة X فرق F مجموعة مفتوحة (لأن F مغلقة متممتها مفتوحة).

وتحوي x فهي جوار لـ x وهذا الجوار لا يتقاطع مع A.

نستنتج أن النقطة x ليست لاصقة في A وبالتالي $\bar{A} \subseteq B$

لنفرض أن $x \notin \bar{A}$ هذا يعني أنه يوجد جوار مفتوح $\mathcal{V}$ لـ x ، $\mathcal{V} \cap A = \varphi$

$X \setminus \mathcal{V}$ مجموعة مغلقة تحوي A والنقطة x لا تنتمي إليها وهذا يعني أن $x \notin B$ هنا يعني $B \subseteq \bar{A}$ من علاقتي الاحتواء نستنتج المساواة.

2. اللصاقة حسب البند الأول هي دائماً مجموعة مغلقة لأنها تقاطع لمجموعات مغلقة وهي أصغر مجموعة مغلقة لأنها تقاطع جميع هذه المجموعات.

3. إذا كانت A تساوي $\bar{A}$ فهي مغلقة لأن اللصاقة هي دائماً مغلقة حسب البند الثاني.

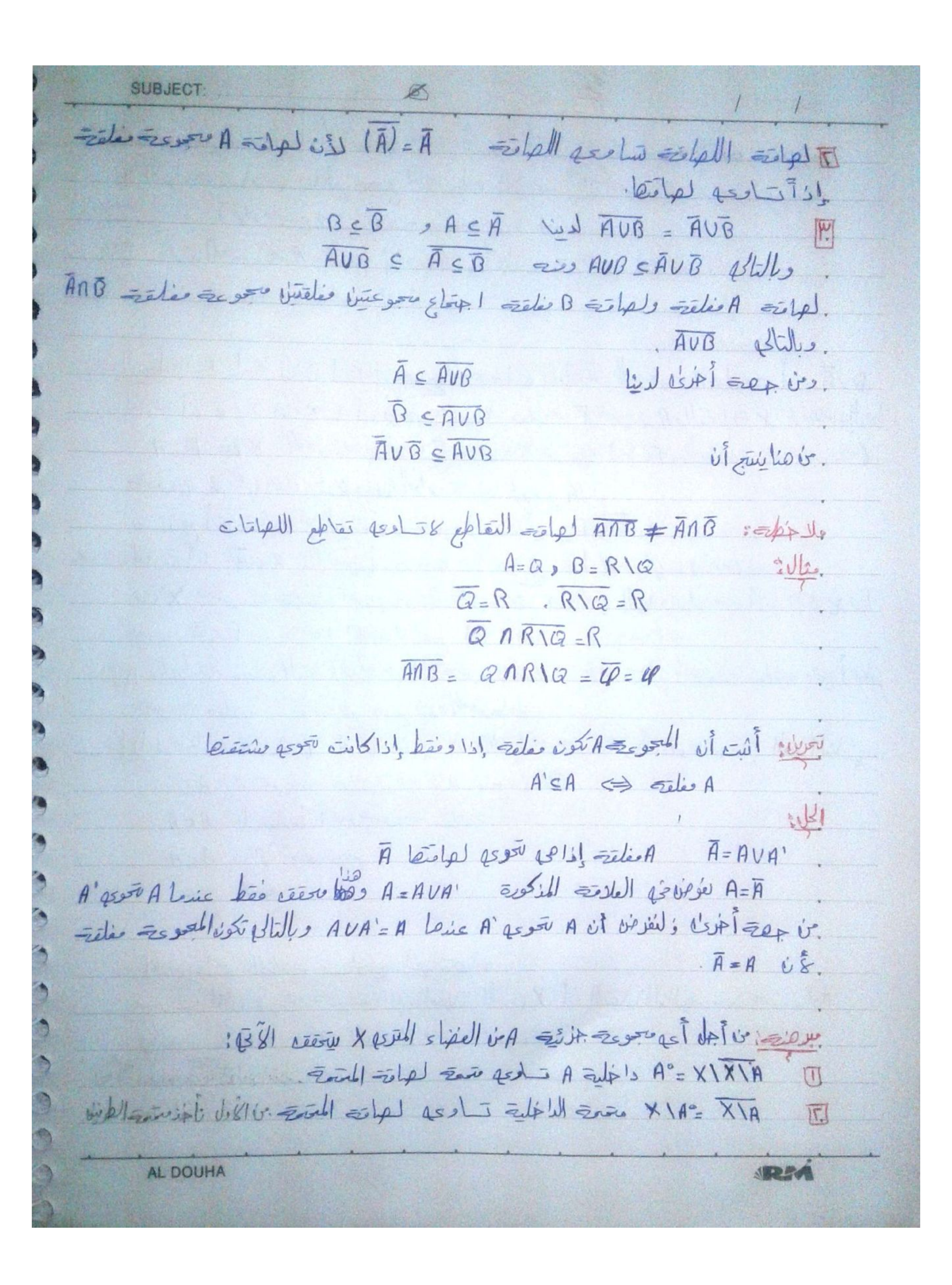
- $A \subseteq A$ · A مجموعة مغلقة تحوي A ينتج من ذلك.
- $\bar{A} \subseteq A$ باعتبارها أصغر مجموعة مغلقة.
- $A \subseteq \bar{A}$ دائماً محققة.
- ينتج $A=\bar{A}$

المجموعات المغلقة تساوي لصاقتها:

مبرهنة: لتكن A ، B مجموعتين من الفضاء المتري X أن القضايا التالية محققة دوماً II

لصاقة $\bar{X}$ تساوي X لكون X مجموعة مغلقة.

لصاقة $\bar{Q}$ ″ Q ″ Q ″ ″ .



٢] لصاقة اللصاقة تساوي اللصاقة $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$ لأن لصاقة A مجموعة مغلقة

إذاً تساوي لصاقتها.

٣] $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ لدينا $A \subseteq \bar{A}$ و $B \subseteq \bar{B}$

وبالتالي $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ ومنه $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$

لصاقة A مغلقة ولصاقة B مغلقة اجتماع مجموعتين مغلقتين مجموعة مغلقة $\bar{A} \cup \bar{B}$

وبالتالي $\overline{A \cup B}$.

ومن جهة أخرى لدينا $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$

$\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

من هنا ينتج أن $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

ملاحظة: $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$ لصاقة التقاطع لا تساوي تقاطع اللصاقات

مثال: $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\bar{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\overline{A \cap B} = \overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \bar{\varnothing} = \varnothing$

تمرين: أثبت أن المجموعة A تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت تحوي مشتقتها

A مغلقة $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

الحل:

$\bar{A} = A \cup A'$ A مغلقة إذا هي تحوي لصاقتها $\bar{A}$

$A = \bar{A}$ نعوض في العلاقة المذكورة $A = A \cup A'$ وهذا محقق فقط عندما A تحوي A'

من جهة أخرى: لنفرض أن A تحوي A' عندما $A \cup A' = A$ وبالتالي تكون المجموعة مغلقة

لأن $\bar{A} = A$.

مبرهنة: من أجل أي مجموعة جزئية A من الفضاء المتري X يتحقق الآتي:

١] $A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}$ داخلية A تساوي متممة لصاقة المتممة.

٢] $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$ متممة الداخلية تساوي لصاقة المتممة من الأول نأخذ متممة الطرفين

SUBJECT:

3) $X\setminus\bar{A} = X\setminus A^\circ$ داخلية المتممة تساوي متممة اللصاقة من الأول نستبدل A بمتممتها

البرهان: لدينا دوماً $A^\circ \subseteq A$

$X\setminus A^\circ \supseteq X\setminus A$

نأخذ لصاقة الطرفين $\overline{X\setminus A} \supseteq \overline{X\setminus A}$

ولكن $X\setminus A^\circ$ مجموعة مغلقة فهي تساوي لصاقتها (لأن A° مفتوحة دائماً)

$X\setminus A^\circ \supseteq \overline{X\setminus A}$ بأخذ متممة الطرفين $A^\circ \subseteq X\setminus\overline{X\setminus A}$

العلاقة الثانية لدينا $X\setminus A \subseteq \overline{X\setminus A}$

ومنه $A \supseteq \overline{X\setminus A}$

ومنه $A^\circ \supseteq (\overline{X\setminus A})^\circ$ داخلية الأولى ستحوي داخلية الثانية

⇓ مفتوحة متممتها مغلقة.

مفتوحة فهي تساوي داخليتها $X\setminus\overline{X\setminus A} = (\overline{X\setminus X\setminus A})^\circ$